Ex.4 求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

解: 记

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

因为$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$, 所以, 矩阵$A$ 可逆且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

注: 对于二阶矩阵求逆矩阵, 建议利用公式$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$. 例如, 设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

则$|A| = ad - bc$, 且

$$A_{11} = d,\ A_{12} = -c,\ A_{21} = -b,\ A_{11} = a.$$

所以,

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

如果$|A| \neq 0$, 那么矩阵A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

也可直接记住该公式. 三阶以上矩阵求逆矩阵, 利用初等行变换

$$(A\ E) \to (E\ A^{-1}).$$